

---

## II. Synthèse de l'activité scientifique

---

**Introduction :** Ce document de synthèse s'articule autour de l'analyse convexe, de l'analyse quasi-convexe et des applications en optimisation. Dans le premier domaine on aborde les thèmes de la continuité, de la différentiabilité et des critères de coïncidence pour les fonctions convexes, puis la convexification des fonctions semi-continues inférieurement. Pour l'étude des fonctions quasi-convexes deux approches sont adoptées: une approche analytique, via un sous-différentiel généralisé, et une approche géométrique, basée sur les normales aux tranches. La dernière partie est consacrée à des applications à l'intégration d'opérateurs multivoques, aux inéquations variationnelles et à des problèmes d'optimisation multi-critères en dimension finie et infinie. Parmi les nouveautés de ce travail, on trouve la notion de monotonie fortement cyclique, qui caractérise le sous-différentiel d'une fonction convexe dont la restriction à son domaine est continue, la quasi-monotonie cyclique, qui est une propriété intrinsèque du sous-différentiel d'une fonction quasi-convexe, et la notion de quasi-monotonie propre, qui caractérise les opérateurs pour lesquels l'inéquation variationnelle associée a toujours des solutions sur toute sous-partie convexe et faiblement compacte de leur domaine. Notons encore une nouvelle caractérisation de la propriété de Radon-Nikodym, et une extension à la dimension infinie d'un résultat de Janin concernant l'intégration d'un opérateur maximal cycliquement sous-monotone, résultat qui généralise le théorème classique de Rockafellar pour les opérateurs maximaux cycliquement monotones.

---

### Analyse convexe

---

Le thème principal de cette section est l'étude des propriétés des fonctions convexes. Les travaux effectués dans ce domaine se décomposent en quatre parties:

- une étude de classification des propriétés de continuité des fonctions convexes s.c.i.,
- une nouvelle caractérisation de la propriété de Radon-Nikodym en relation avec la différentiabilité au sens de Gâteaux,
- une étude de critères de coïncidence de deux fonctions convexes s.c.i.,
- une étude sur la convexification des fonctions s.c.i. basée sur le sous-différentiel de Fenchel-Moreau.

#### Continuité des fonctions convexes

Dans certains problèmes d'optimisation on doit souvent considérer des fonctions qui prennent leurs valeurs dans l'espace  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On considère dans la suite que  $\widehat{\mathbb{R}}$  est muni de la topologie étendue de  $\mathbb{R}$ , i.e. la topologie engendrée par les ouverts habituels de  $\mathbb{R}$  et les parties de la forme  $(a, +\infty]$ , où  $a \in \mathbb{R}$ .

Soit  $X$  un espace de Banach et  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction convexe, semi-continue inférieurement (s.c.i.). Notons  $\text{dom} f$  l'ensemble  $\{x \in X : f(x) < +\infty\}$ . Il est bien connu ([50, page 37]) que

$$f \text{ est continue en } x \text{ si et seulement si } x \in \text{int} \text{dom} f. \quad (1)$$

On peut également ajouter à cette équivalence l'assertion suivante:

$$\partial f \text{ est localement borné} \quad (2)$$

[Rappelons ici ([52] e.g.) que pour tout  $x \in \text{dom} f$ , le sous-différentiel au sens de Fenchel-Moreau  $\partial f$  est défini par:

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x \rangle, \forall y \in X\}. \quad (3)$$

Il suit de (1) que  $f$  est discontinue en  $x \in \text{dom} f$ , si et seulement si  $x \in \text{dom} f \setminus \text{int} \text{dom} f$ . En particulier,  $f$  est discontinue en tout point, lorsque  $\text{int} \text{dom} f = \emptyset$ .

Citons trois exemples - typiques de notre étude - où cela est le cas :

- $f$  est la fonction indicatrice d'une partie convexe, fermée et d'intérieur vide.
- $f$  est le résultat d'un prolongement (en ajoutant la valeur  $+\infty$ ) d'une fonction  $g$  convexe continue à un plus grand espace sur lequel  $\text{int} \text{dom} g = \emptyset$  (ceci est une opération standard en optimisation).
- $f$  est la norme  $\|\cdot\|_1$  sur l'espace de Hilbert  $\ell^2(\mathbb{N})$ .

Dans les deux premiers exemples, on note que la discontinuité de la fonction  $f$  n'est pas un défaut intrinsèque, mais elle est due à la valeur  $+\infty$  que l'on a imposée en dehors de son domaine. Par contre, dans le troisième exemple, la discontinuité a des raisons bien plus profondes : on remarque aisément qu'au voisinage de chaque point  $x \in \text{dom} f$  la fonction a des valeurs à la fois finies et arbitrairement grandes. Comment alors distinguer ces deux différents types de discontinuité ?

Commençons par une simple remarque : la restriction  $f|_{\text{dom} f}$  de la fonction  $f$  à son domaine ne prend que des valeurs réelles. Dans les deux premiers exemples cette restriction est continue, alors que dans le troisième elle est discontinue en tout point. Pour répondre donc à la question ci-dessus, il suffit de trouver un moyen de concrétiser cette information.

Dans cette partie, on propose une réponse complète basée sur une approche duale. Avant de donner les détails, rappelons d'abord une propriété liée au sous-différentiel, la *monotonie cyclique* ([53]) :

Un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  est dit cycliquement monotone, si pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , tous  $x_0, x_1, \dots, x_n$  dans  $X$  et tous  $x_0^* \in T(x_0), x_1^* \in T(x_1), \dots, x_n^* \in T(x_n)$  on a :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle \leq 0. \quad (4)$$

(où  $x_{n+1} := x_0$ ).

Cette propriété fondamentale caractérise, parmi les opérateurs monotones, ceux qui sont inclus dans le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. Dans [22], on introduit une variante de la monotonie cyclique, appelée "*monotonie  $\sigma$ -cyclique*", où les sommes finies sont remplacées par des sommes de séries :

Un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  est dit  $\sigma$ -cycliquement monotone en  $x_0$ , si pour toute suite  $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$  de  $X$  satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  et pour tous  $x_i^* \in T(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle \leq 0 \quad (5)$$

On peut montrer que (5) est vérifié pour tout opérateur monotone dans  $\mathbb{R}$  ainsi que pour tout sous-différentiel localement borné, ce qui n'est évidemment pas le cas du sous-différentiel d'une fonction ayant des discontinuités. En effet, dans [10], on montre que la monotonie  $\sigma$ -cyclique en  $x_0$  caractérise le sous-différentiel d'une fonction convexe, s.c.i., dont la restriction à son domaine de sous-différentiabilité est continue en  $x_0$ .

Une propriété plus restrictive, adaptée à la continuité de la restriction au domaine, est aussi introduite :

Un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  est dit fortement cycliquement monotone en  $x_0$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x_1 \in \text{dom} T \cap B(x_0, \delta)$ , pour toute suite  $\{x_i\}_{i=2}^{+\infty}$  de  $\text{dom} T$  satisfaisant  $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = x_0$ , et pour toute suite  $\{x_i^*\}_{i \geq 1}$  de  $X^*$  satisfaisant  $x_i^* \in T(x_i)$  pour tout  $i \geq 1$ , on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Le schéma suivant résume les résultats de notre étude ( $f$  désigne une fonction convexe s.c.i. et  $\partial f$  son sous-différentiel, et l'on dit qu'un opérateur  $T$  est localement borné sur une partie  $D$  si tout point de  $D$  a un voisinage sur lequel  $T$  est borné):

$$\begin{array}{ccc}
\partial f \text{ localement borné sur } \text{dom} f & \iff & f \text{ continue} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\partial f \text{ fort. cycliquement monotone} & \iff & f|_{\text{dom} f} \text{ continue} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\partial f \text{ } \sigma\text{-cycliquement monotone} & \iff & f|_{\text{dom} \partial f} \text{ continue}
\end{array}$$

Notons que toute implication non affichée ci-dessus est en général fausse.

### **Différentiabilité des fonctions convexes et propriété de Radon-Nikodym**

On dit qu'un espace de Banach  $X$  est de Radon-Nikodym, si toute mesure vectorielle  $m : \mathcal{B} \rightarrow X$  de variation bornée et absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$ , peut être représentée comme une intégrale (au sens de Bochner) d'une fonction  $g := \left[ \frac{dm}{d\lambda} \right] \in L^1([0, 1], X)$ ; ( $\mathcal{B}$  désigne la tribu borélienne de  $[0, 1]$ ). D'après les travaux classiques de Rieffel, Phelps, Stegall et d'autres (voir [50, Chap. 5] e.g.) cette propriété sur un espace dual se trouve étroitement liée à la différentiabilité au sens de Fréchet des fonctions convexes continues sur le préduel. Plus précisément on a :

$$X \text{ est un espace d'Asplund} \iff X^* \text{ est un espace de Radon-Nikodym} \quad (7)$$

[Rappelons que  $X$  est un espace d'Asplund, si toute fonction convexe continue sur un ouvert de  $X$  est Fréchet différentiable sur une partie  $G_\delta$ -dense de son domaine.]

Réciproquement, la caractérisation des espaces de Radon-Nikodym par la Fréchet-différentiabilité générique des fonctions  $w^*$ -s.c.i. convexes continues sur le dual, a été montrée par J. Collier dans [17] :

$$X \text{ est de Radon-Nikodym} \iff X^* \text{ est préfaiblement Asplund.} \quad (8)$$

Ici le terme "préfaiblement Asplund" signifie que toute fonction  $w^*$ -s.c.i. convexe continue sur  $X^*$  est Fréchet-différentiable dans une partie  $G_\delta$  dense de son domaine.

Dans [7], on donne une nouvelle caractérisation des espaces de Radon-Nikodym :

$X$  est de Radon-Nikodym si et seulement si toute fonction  $w^*$ -s.c.i. convexe continue sur l'espace dual  $X^*$  est Gâteaux-différentiable en un certain point, sa Gâteaux-dérivée étant dans le préduel  $X$ .

Puisque les Fréchet-dérivées des fonctions  $w^*$ -s.c.i. sont toujours dans le préduel ([3, Proposition 2.1]), l'intérêt du résultat montré est de remplacer "Fréchet" par "Gâteaux" et de passer de la différentiabilité générique à la différentiabilité en un point. D'autre part, si l'espace  $X$  n'est pas de Radon-Nikodym, alors il peut être possible d'avoir une fonction  $w^*$ -s.c.i. convexe continue sur  $X^*$  qui est nulle part Fréchet-différentiable, mais qui a des points de Gâteaux-différentiabilité et des Gâteaux dérivées dans le préduel  $X$ . En effet, on construit une fonction  $f$   $w^*$ -s.c.i. convexe continue sur  $c_0(\mathbb{N})^* = \ell^1(\mathbb{N})$ , nulle part Fréchet différentiable mais Gâteaux-différentiable en tout point d'un ensemble dense dans  $\ell^1(\mathbb{N})$ , avec dérivées dans le préduel  $c_0(\mathbb{N})$ .

### **Critères de coïncidence de fonctions convexes**

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux questions suivantes :

- Une fonction convexe s.c.i. est-elle déterminée d'une manière unique à partir de ses valeurs sur une partie dense ?
- Si  $f$  est une fonction s.c.i., si  $\text{dom} f$  est une partie convexe et si  $\partial f$  est non-vidé sur une partie dense de  $\text{dom} f$ , peut-t-on conclure que  $f$  est convexe ?

Concernant la première conjecture, on montre dans [12] qu'en dimension infinie la réponse est négative. En particulier, il est même possible d'avoir deux fonctions distinctes  $f_1$  et  $f_2$  convexes, s.c.i., et positivement homogènes, qui prennent les mêmes valeurs sur une partie dense de  $X$  et qui satisfont  $f_1 \leq f_2$  en tout point (notons ici que ce même exemple montre que la réponse à la deuxième question est aussi négative).

On étudie ensuite la classe  $\mathcal{G}_1(X)$  des fonctions convexes s.c.i.  $g$  pour lesquelles il n'existe aucune fonction majorante (différente de  $g$ ) s.c.i. qui coïncide avec  $g$  sur une partie dense de  $\text{dom}g$ . On obtient alors le résultat suivant :

Pour toute fonction convexe s.c.i.  $g$ , de domaine dense dans  $X$ , on a

$$g \in \mathcal{G}_1(X) \iff \text{dom}g = X.$$

A partir de la deuxième conjecture, une question bien plus pertinente se pose : si  $g$  est une fonction convexe et s.c.i. et si  $f$  est une fonction s.c.i. telle que  $f^{**} = g$  et que  $\text{dom}(\partial f)$  est dense dans  $\text{dom}g$ , est-il vrai que  $f = g$  ?

Pour aborder cette question, notons  $\mathcal{G}_2(X)$  la classe des fonctions  $g$  pour lesquelles la conclusion ci-dessus est vraie. Il s'ensuit que  $\mathcal{G}_2(X)$  contient strictement la classe  $\mathcal{G}_1(X)$ . Pour cette nouvelle classe on obtient alors le résultat suivant :

Pour toute fonction convexe s.c.i. et positivement homogène  $g$  avec  $\text{dom}g$  dense dans  $X$ , on a :

$$g \in \mathcal{G}_2(X) \iff \text{dom}g = X.$$

### Etude de la convexification d'une fonction s.c.i.

Il est bien connu ([53], [55] e.g.) qu'une fonction s.c.i. est convexe si (et seulement si) son sous-différentiel de Fenchel-Moreau est un opérateur maximal cycliquement monotone. (Il est clair que l'hypothèse de maximalité est essentielle, puisque le sous-différentiel au sens de Fenchel-Moreau d'une fonction quelconque est toujours cycliquement monotone.)

Dans [8], on démontre qu'en dimension finie, si l'hypothèse de maximalité du sous-différentiel est remplacée par le fait que ses valeurs sont non vides sur un ensemble dense de l'espace, on peut toujours conclure que la fonction est convexe (et partout définie). Notons que ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie (voir aussi le paragraphe précédent), sauf si le sous-différentiel possède une sélection localement bornée dans son domaine.

On s'intéresse ensuite au résultat classique de Rockafellar ([53]) qui affirme que tout opérateur maximal cycliquement monotone est en fait le sous-différentiel d'une fonction convexe s.c.i. (unique à une constante près). Pour ce faire, Rockafellar a introduit un processus d'intégration pour les opérateurs multivoques cycliquement monotones. Rappelons ici ce processus :

Etant donné  $T : X \rightrightarrows X^*$  et  $x \in \text{dom}T$ , la fonction  $f_T$  définie ci-dessous est propre (lorsque l'opérateur est cycliquement monotone) convexe s.c.i. et elle satisfait  $T(x) \subset \partial f(x)$  pour tout  $x \in X$  :

$$f_T(x) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle + \langle x_n^*, x - x_n \rangle \right\} \quad (9)$$

où le supremum est pris sur tout  $n \geq 1$ , tous  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dans  $\text{dom}T$  et tous  $x_0^* \in T(x_0), x_1^* \in T(x_1), \dots, x_n^* \in T(x_n)$ .

Rappelons maintenant que le sous-différentiel  $\partial f$  (au sens de Fenchel et Moreau) d'une fonction  $f$  s.c.i. (non nécessairement convexe) est toujours un opérateur cycliquement monotone (mais éventuellement à valeurs vides partout). Cependant, dans le cas où la fonction  $f$  (ou une perturbation linéaire d'icelle) a un minimiseur global, la partie  $\text{dom}(\partial f)$  n'est pas vide et on peut alors considérer la fonction convexe s.c.i.  $\hat{f} = f_{\partial f}$ , définie par (9) pour  $T = \partial f$ . Il s'ensuit que  $\hat{f}$  est un minorant de  $f$ , donc elle minore l'enveloppe convexe s.c.i.  $f^{**}$  de  $f$  ([36, page 218] e.g.).

Une question naturelle alors se pose :

Quand les fonctions  $\hat{f}$  et  $f^{**}$  sont-elles égales ?

Le résultat classique de Rockafellar ([53]) affirme que cela est le cas, si la fonction  $f$  est elle-même convexe et s.c.i. car on aura alors  $f = \hat{f} = f^{**}$ . D'autre part, un exemple relativement simple dans  $\mathbb{R}^2$  (voir [11]) montre qu'une telle conclusion – bien que toujours vraie en dimension 1 – est en général fautive si  $f$  n'est pas convexe.

Dans [8], on démontre que  $\hat{f} = f^{**}$ , pourvu que  $f$  soit *1-coercive* (ou *super-coercive*, selon certains auteurs), i.e.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty. \quad (10)$$

Ce résultat a été généralisée dans [11] pour la classe des fonctions *epi-pointées*, i.e. des fonctions satisfaisant  $\text{intdom} f^* \neq \emptyset$ , où  $f^*$  désigne la conjuguée de  $f$ .

---

## Analyse quasi-convexe

---

Le thème de recherche dans cette section est l'analyse quasi-convexe, c'est-à-dire la convexité et la monotonie généralisées et leurs applications en optimisation. Dans cette partie on trouve :

- une étude dans le cadre de l'analyse non-lisse, c'est-à-dire faisant appel à des notions de sous-différentiel généralisé,
- une étude géométrique, avec la notion de “normales aux tranches”.

### Approche analytique : sous-différentiel généralisé

La convexité généralisée est étroitement liée à l'économie mathématique. La quasi-convexité, souvent même stricte ou semi-strictes, est une hypothèse standard sur (l'opposé de) la fonction d'utilité dans les modèles micro-économiques. Cette propriété décrit plus ou moins correctement le comportement des consommateurs (voir [1] e.g.). Rappelons ici qu'une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est dite quasi-convexe, si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la partie  $S_f(\lambda) := \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$  est convexe.

Une autre notion importante en économie mathématique est la fonction de demande, qui correspond à la dérivée  $f'$  (si elle existe) de la fonction d'utilité  $f$ . L'opposée  $g$  d'une telle fonction est quasi-monotone ([1] e.g.), i.e. elle satisfait la relation suivante, pour tous  $x_1, x_2 \in X$  :

$$\langle g(x_1), x_2 - x_1 \rangle > 0 \implies \langle g(x_2), x_2 - x_1 \rangle \geq 0. \quad (11)$$

Notons tout d'abord que cette notion peut être étendue d'une manière naturelle aux applications (i.e. opérateurs) multivoques  $T : X \rightrightarrows X^*$  de la façon suivante ([42]) : pour tous  $x_1, x_2 \in X$  et tous  $x_1^* \in T(x_1)$ ,  $x_2^* \in T(x_2)$  :

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > 0 \implies \langle x_2^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0. \quad (12)$$

(Dans [31] une autre manière de définir la quasi-monotonie avait été introduite pour la classe des opérateurs multivoques qui proviennent d'un sous-différentiel. L'équivalence de ces deux définitions a été établie dans [48].)

Une notion plus restrictive est la pseudo-monotonie (au sens de Karamardian [39]) : pour tous  $x_1, x_2 \in X$  et tous  $x_1^* \in T(x_1)$ ,  $x_2^* \in T(x_2)$  :

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \implies \langle x_2^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0. \quad (13)$$

Cette dernière notion a été utilisée dans des problèmes de complémentarité, d'équilibre ou d'inéquations variationnelles ([39], [54], [35] e.g.).

Dans les années 80-90, avec les développements de l'analyse non-lisse, plusieurs notions de sous-différentiel généralisé ont été proposées pour pallier l'absence de différentiabilité dans le cas des fonctions non régulières (c'est-à-dire, non différentiables, voire même non continues). Ensuite, et pendant quelques années, plusieurs auteurs ([42], [48], [47], [45] e.g.) se sont intéressés à établir une correspondance entre la convexité généralisée et la monotonie généralisée dans ce cadre non-lisse. Il a été alors établi que, si  $f$  est une fonction s.c.i. et  $\partial^* f$  un sous-différentiel abstrait satisfaisant le théorème de la valeur moyenne approchée ([4], [46] e.g.), alors :

$$f \text{ est quasi-convexe} \iff \partial^* f \text{ est quasi-monotone.} \quad (14)$$

Si l'on suppose aussi que  $f$  est continue, alors :

$$f \text{ est pseudo-convexe} \iff \partial^* f \text{ est pseudo-monotone.} \quad (15)$$

Les deux principaux piliers de l'analyse quasi-convexe, la convexité généralisée et la monotonie généralisée, après avoir suivi un développement indépendant, se sont trouvés désormais étroitement liés par l'analyse non lisse.

(i) *Caractérisation de la stricte (resp. semi-strict) quasi-convexité*

L'objectif de ce paragraphe est d'élargir la correspondance non lisse mentionnée ci-dessus et de caractériser aussi des sous-classes de fonctions quasi-convexes : concrètement, dans [25], on caractérise les fonctions localement lipschitziennes  $f$  qui sont semi-strictement (resp. strictement) quasi-convexes par la semi-strict (resp. stricte) quasi-monotonie de leur sous-différentiel de Clarke  $\partial^\circ f$  ([16]). On obtient alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} f \text{ strict. quasi-convexe} & \iff & \partial^\circ f \text{ strict. quasi-monotone} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \text{ semi-strict. quasi-convexe} & \iff & \partial^\circ f \text{ semi-strict. quasi-monotone} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \text{ quasi-convexe} & \iff & \partial^\circ f \text{ quasi-monotone} \end{array}$$

Après la publication de l'article [25], on s'est aperçu que la définition de la semi-strict (resp. stricte) quasi-monotonie d'un opérateur multivoque avait antérieurement été introduite par D.T. Luc dans [43]. Dans le même travail on trouve d'ailleurs certaines des implications mentionnées ci-haut, ainsi qu'une caractérisation de la semi-strict (resp. stricte) quasi-convexité dans le cas de dimension 1. Bien attendu cette référence aurait figurée dans [25] si on en avait eu connaissance.

(ii) *Dualité entre convexité et monotonie généralisées et notion de cyclicité*

Les équivalences exprimées en (14) et (15) tirent leurs racines du résultat classique suivant ([18]) : si  $f$  est une fonction s.c.i. et  $\partial^* f$  est un sous-différentiel abstrait qui satisfait le théorème de la valeur moyenne approchée, alors :

$$f \text{ est convexe} \iff \partial^* f \text{ est monotone.} \quad (16)$$

Il s'ensuit que  $\partial^* f$  sera égal à  $\partial f$ , le sous-différentiel de Fenchel-Moreau de l'analyse convexe. De ce fait, on peut également ajouter à (16) une assertion équivalente :

$$\partial^* f \text{ est cycliquement monotone.} \quad (17)$$

Une question naturelle alors se pose :

Existe-il une notion analogue en convexité généralisée ?

L'objectif des travaux [26] et [28] est d'introduire des notions de quasi-monotonie (respectivement, pseudo-monotonie) cyclique et d'établir qu'elles sont vérifiées par tout sous-différentiel  $\partial^* f$  d'une fonction  $f$  s.c.i. et quasi-convexe (respectivement, continue et pseudo-convexe).

Présentons alors ces définitions (voir (4) pour la définition d'un opérateur cycliquement monotone).

- Un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  est dit *cycliquement quasi-monotone*, si pour tout  $n \geq 1$  et tous  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ , il existe  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que :

$$\langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle \leq 0, \forall x_i^* \in T(x_i) \quad (18)$$

(où  $x_{n+1} := x_1$ ).

- Un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  est dit *cycliquement pseudo-monotone*, si pour tout  $n \geq 1$ , tous  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  et tous  $x_i^* \in T(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \langle x_i^*, x_{i+1} - x_i \rangle \geq 0 \implies \langle x_n^*, x_1 - x_n \rangle \leq 0. \quad (19)$$

A partir de ces définitions, il est facile à vérifier les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \text{monotonie cyclique} & \implies & \text{monotonie} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pseudo-monotonie cyclique} & \implies & \text{pseudo-monotonie} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{quasi-monotonie cyclique} & \implies & \text{quasi-monotonie} \end{array}$$

Ensuite, on renforce les caractérisations (14) et (15) comme suit :

- pour toute fonction s.c.i.

$$f \text{ est quasi-convexe} \iff \partial^* f \text{ est cycliquement quasi-monotone}$$

- pour toute fonction continue :

$$f \text{ est pseudo-convexe} \iff \partial^* f \text{ est cycliquement pseudo-monotone.}$$

Cependant, il faut souligner que la cyclicité est une propriété étroitement liée aux sous-différentiels : la monotonie seule (et même la forte monotonie), n'entraîne pas forcément la quasi-monotonie cyclique.

La quasi-monotonie et la pseudo-monotonie cycliques sont des notions qui apparaissent également en économie mathématique. En particulier, pour une fonction de demande, la quasi-monotonie cyclique est un prérequis pour la construction de la fonction d'utilité.

(iii) *Sous-différentiel adapté à l'analyse quasi-convexe*

Rappelons d'abord certaines propriétés du sous-différentiel de Fenchel-Moreau (le sous-différentiel de l'analyse convexe) :

- Pour toute fonction  $f$ ,  $\partial f$  est cycliquement monotone.
- Si  $f$  est continue et  $\text{dom} f$  est convexe, alors :

$$f \text{ est convexe} \iff \text{dom}(\partial f) \text{ est dense dans } \text{dom} f.$$

- Si  $f$  est convexe, alors pour tout sous-différentiel abstrait  $\partial^*$  satisfaisant le théorème de la valeur moyenne approchée, on a

$$\partial^* f = \partial f. \quad (20)$$

Quel serait alors l'analogie en analyse quasi-convexe ?

Dans [29], on a proposé la notion suivante : à partir d'un sous-différentiel abstrait  $\partial^*$  (par exemple, Dini, Clarke-Rockafellar etc) on définit le sous-différentiel "quasi-convexe"  $\partial^q f : X \rightrightarrows X^*$  d'une fonction s.c.i.  $f$  en  $x \in \text{dom} f$  comme suit :

$$\partial^q f(x) = \begin{cases} \partial^* f(x) \cap N_f(x), & \text{si } N_f^<(x) \neq \{0\} \\ \emptyset, & \text{si } N_f^<(x) = \{0\}, \end{cases} \quad (21)$$

où

$$N_f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in S_f(f(x))\} \quad (22)$$

et

$$N_f^<(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in S_f^<(f(x))\}. \quad (23)$$

Ici  $S_f(f(x))$  (resp.  $S_f^<(f(x))$ ) désigne le sous-niveau (resp. sous-niveau strict) de la fonction  $f$ .

On montre ensuite que  $\partial^q$  possède simultanément les trois propriétés recherchées :

- Pour toute fonction  $f$ ,  $\partial^q f$  est cycliquement quasi-monotone.
- Si  $f$  est continue et  $\text{dom} f$  est convexe, alors :

$$f \text{ est quasi-convexe} \iff \text{dom}(\partial^q f) \text{ est dense dans } \text{dom} f.$$

- Si  $f$  est convexe, alors

$$\partial^q f = \partial f.$$

On établit ensuite des règles de calcul adaptées à l'analyse quasi-convexe.

### Approche géométrique : la normale aux tranches

La notion de cône normal aux tranches de la fonction (voir (22)) a été utilisée à plusieurs reprises dans l'étude des conditions d'optimalité des fonctions quasi-convexes, et s'est révélée très fructueuse dans les problèmes de minimisation de fonctions quasi-convexes ([13], [20] e.g.).

Cependant, on peut facilement voir que, indifféremment de la fonction choisie, l'opérateur  $N_f$  est toujours cycliquement quasi-monotone et par conséquent, il ne peut pas servir pour une caractérisation des fonctions quasi-convexes – rôle toujours considéré comme important pour un sous-différentiel.

Dans [5], on propose une variante  $\mathcal{N}_f$  de la notion initiale, que l'on appelle "la normale aux tranches" et qui remédie à cet inconvénient. En effet, les résultats obtenus dans [5] et [6] montrent qu'une classification est alors possible, et que de plus, en adoptant cette démarche on peut obtenir des résultats bien plus pertinents. (On peut - à posteriori - justifier cela en évoquant le caractère géométrique de la normale, qui exploite directement la convexité des tranches d'une fonction quasi-convexe).

La notion de normale proposée consiste à considérer d'abord le cône tangent de la tranche, et de prendre ensuite le cône normal (i.e. le cône polaire) du cône tangent. Cela n'entraîne aucune modification sur  $N_f$ , si  $f$  est une fonction quasi-convexe, ce qui signifie en particulier que tout résultat établi dans les travaux cités reste valable. D'autre part, la nouvelle notion s'avère efficace pour filtrer la convexité généralisée. Elle permet, en fait, une caractérisation géométrique des principales classes de fonctions quasi-convexes continues en terme de monotonie généralisée :

$$\begin{array}{ccc} f \text{ str. quasi-convexe} & \iff & \mathcal{N}_f \text{ str. quasi-monotone} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \text{ semi-str. quasi-convexe} & \iff & \mathcal{N}_f \text{ semi-str. quasi-monotone} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \text{ quasi-convexe} & \iff & \mathcal{N}_f \text{ quasi-monotone} \end{array}$$



On souligne en particulier que les caractérisations ci-dessus sont d'une nature différente et ne peuvent pas être déduites des résultats évoqués dans les paragraphes précédents. D'ailleurs, elle sont établies pour la classe des fonctions continues (et non pas seulement pour les fonctions localement lipschitziennes).

Dans [6], on s'intéresse aussi au problème d'intégration de la normale, i.e. déterminer, parmi les fonctions d'une certaine classe  $\mathcal{C}$ , celles qui ont le même opérateur normal.

Notre résultat est le suivant :

Soit  $\mathcal{C}$  la classe des fonctions quasi-convexes continues telles que:

- (i) tout minimum local est global et
- (ii) l'ensemble  $\operatorname{arg\,min} f$  est toujours inclus dans un hyperplan fermé.

Alors, pour  $f, g \in \mathcal{C}$  on a :

$$\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g \iff f \text{ est } (\mathcal{N}_g \setminus \{0\})\text{-pseudo-convexe.}$$

---

### Applications aux inéquations variationnelles

---

Dans cette section, on s'intéresse au problème d'inéquation variationnelle  $\operatorname{PIV}(T, K)$  d'un opérateur multivoque  $T : X \rightrightarrows X^*$  sur une partie convexe fermée et non-vide  $K$  telle que  $K \subseteq \operatorname{dom}T$ . Cela consiste à trouver un  $x \in K$  tel que pour tout  $y \in K$ , il existe  $x^* \in T(x)$

$$\langle x^*, y - x \rangle \geq 0. \tag{24}$$

Ce problème a été introduit par Stampacchia (voir [40]) à partir d'un problème d'E.D.P. Des théorèmes d'existence dans le cas d'un opérateur (univoque) continu, puis monotone et héli-continu, puis pseudomonotone (au sens de Brézis [15]) ont été établis ([40], [34] e.g.).

Cependant,  $\operatorname{PIV}(T, K)$  présente aussi un intérêt en optimisation; on reconnaît aisément que (24) forme une condition nécessaire d'optimalité lorsque  $T$  est le sous-différentiel d'une fonction-objectif. Il est alors naturel de s'intéresser aux théorèmes d'existence quand  $T$  a une propriété de monotonie généralisée.

#### Conditions de coercivité optimales

On avait vu dans la section précédente que la pseudo-monotonie (au sens de Karamardian) caractérise les sous-différentiels des fonctions continues pseudo-convexes. De plus, dans le cas où  $T = \partial^* f$ , avec  $f$  pseudo-convexe, la condition (24) est non seulement nécessaire mais aussi suffisante pour que le problème de minimisation de  $f$  ait une solution. Cela justifie l'intérêt d'étudier  $\operatorname{PIV}(T, K)$  pour un opérateur  $T$  multivoque et pseudomonotone au sens de Karamardian (voir [35], [54], [59], [19]).

Dans [27], on considère ce problème sur des parties non bornées. L'hypothèse classique faite sur l'opérateur, afin d'obtenir des résultats d'existence, est alors une condition de coercivité. Le théorème principal de [27] montre que, pour les opérateurs pseudomonotones et semi-continus supérieurement sur un espace réflexif, trois des conditions de coercivité récemment utilisées dans la littérature sont équivalentes à l'existence d'une solution du problème  $\operatorname{PIV}(T, K)$ . Dans ce cadre, ces trois conditions, alors équivalentes, sont optimales pour établir l'existence de solutions. Un résultat récent de Crouzeix [19] en dimension finie se trouve ainsi généralisé et complété.

### Quasi-monotonie propre et problème associé

Une méthode standard pour résoudre le problème (24) est de résoudre d'abord un problème associé ([44]). Ce dernier (noté par  $\text{PIVA}(T, K)$ ) consiste à trouver un  $x \in K$  tel que, pour tout  $y \in K$ , et tout  $y^* \in T(y)$  on ait :

$$\langle y^*, y - x \rangle \geq 0. \quad (25)$$

En effet, si l'on établit l'existence d'une telle solution, une conséquence immédiate sera l'existence de solutions du  $\text{PIV}(T, K)$ , pourvu que l'opérateur  $T$  soit radialement semi-continu supérieurement, hypothèse habituelle dans toutes les applications.

Notre principale contribution dans cette théorie a été la définition de la notion de *quasimonotonie propre* (voir [26], [28]) :

- Un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  est dit proprement quasi-monotone si, pour tous  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  et tout  $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , où  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et  $\lambda_i > 0$ , il existe  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tel que :

$$\forall x_i^* \in T(x_i) : \langle x_i^*, y - x_i \rangle \leq 0. \quad (26)$$

Cette nouvelle notion se situe entre la pseudo-monotonie (ou la quasi-monotonie cyclique) et la quasi-monotonie, comme le révèle le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{pseudo-monotonie} \\ & & \Downarrow \\ \text{quasi-monotonie cyclique} & \implies & \mathbf{\text{quasi-monotonie propre}} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{quasi-monotonie} \end{array}$$

Toutes les implications ci-dessus sont strictes. Cependant, si  $T = \partial^* f$  est quasi-monotone, alors  $T$  est aussi proprement quasi-monotone (voir [28]).

On a montré dans [26], [28] que, si  $T$  est proprement quasimonotone, alors (25) a au moins une solution sur toute partie  $K$  faiblement compacte, convexe et non vide (notons qu'aucune hypothèse de continuité n'a été faite sur  $T$ ). Récemment R. John [38] a complété ce résultat en montrant que la réciproque est vraie: si un opérateur  $T$  est tel que, pour toute partie compacte, convexe, non vide, (25) a toujours une solution, alors l'opérateur est proprement quasimonotone :

$$T \text{ est proprement quasi-monotone} \iff \begin{array}{l} \text{PIVA}(T, K) \text{ a des solutions,} \\ \forall K \neq \emptyset, \text{ convexe, } w\text{-compacte.} \end{array}$$

La quasi-monotonie propre est donc une hypothèse minimale sur l'opérateur pour assurer l'existence de solutions du problème associé. Dans de nombreuses applications des inéquations variationnelles (à la mécanique, physique etc), l'opérateur est supposé maximal monotone (en particulier égal au sous-différentiel d'une fonction convexe). En fait, d'après nos résultats, l'existence des solutions du problème associé est assurée lorsque l'opérateur est proprement quasimonotone (ce qui est le cas pour les sous-différentiels des fonctions quasiconvexes).

### Inéquations variationnelles vectorielles

Dans [24], on s'intéresse aux inéquations variationnelles vectorielles qui sont notamment liés à l'optimisation multicritère. On obtient des théorèmes d'existence en dimension infinie. On donne aussi un contre-exemple qui révèle une erreur dans les résultats principaux de trois articles publiés entre 1990 et 1994. La preuve du théorème principal est basée sur l'existence de "points internes" (inner points) qui est une hypothèse faible (en particulier satisfaite pour un espace séparable).

Intégrer un opérateur  $T : X \rightarrow X^*$ , c'est-à-dire trouver une fonction dérivable  $f$  telle que  $T = f'$ , a attiré beaucoup d'attention. Lorsque l'opérateur  $T$  est multivoque, cette question devient : trouver une fonction  $f$  telle que  $T \subseteq \partial^* f$ , pour une certaine notion de sous-différentiel  $\partial^*$  ([57] e.g.). Ce problème a été entièrement résolu par Rockafellar ([53]) dans le cas où la fonction  $f$  est convexe et  $\partial^* = \partial$  est le sous-différentiel de Fenchel-Moreau de l'analyse convexe. Plus précisément, il a été établi que la monotonie cyclique maximale est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur  $T : X \rightrightarrows X^*$  puisse s'écrire sous la forme  $T = \partial f$ .

Notons que la méthode développée dans [53] fait appel au caractère global du sous-différentiel  $\partial$  - voir aussi sa définition dans (3). Le grand avantage et une particularité caractéristique de l'analyse convexe est le fait qu'une telle approche reste toute de même équivalente à des approches locales (voir aussi (20) par exemple). Notons ainsi que dans [14, Corollary 2.1], on trouve une autre méthode pour retrouver le résultat de Rockafellar.

Dans ce document, les travaux effectués sur ce sujet se répartissent en deux directions :

- une méthode à caractère global, proche de l'analyse quasi-convexe
- une méthode analytique, dans l'esprit de l'analyse non-lisse.

### Intégration via le sous-différentiel inférieur

Dans [8] on a travaillé avec le sous-différentiel inférieur  $\partial^<$  introduit par F. Plastria dans [51], qui est une adaptation au cas quasi-convexe du sous-différentiel de Fenchel-Moreau. On a montré qu'une fonction quasi-convexe lipschitzienne  $f$  est caractérisée par l'existence d'une sélection bornée pour son sous-différentiel inférieur  $\partial^< f$  dans un domaine dense.

Par ailleurs, on a considéré une classe d'opérateurs (notée  $R(x_0)$  où  $x_0$  est un point fixé) qui est strictement plus grande que la classe d'opérateurs cycliquement monotones. Si un opérateur  $T$  satisfait  $R(x)$  pour tout  $x \in \text{dom}T$ , alors  $T$  est monotone. D'autre part, on a montré qu'un opérateur  $T$  satisfait  $(R(x_0))$  en un point  $x_0 \in \text{dom}T$  si, et seulement si, il existe une fonction quasi-convexe  $h_T$  (avec  $\partial h_T(x_0) \neq \emptyset$ ) telle que  $T(x_0) \subseteq \partial h_T(x_0)$  et  $T(x) \subseteq \partial^< h_T(x)$ , pour tout  $x \in X$ .

### Sous-monotonie cyclique et intégration

La propriété de sous-monotonie a été introduite par Spingarn [56] pour caractériser le sous-différentiel de Clarke d'une fonction "sous- $C^1$ ". On rappelle qu'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite sous- $C^1$  (où  $U$  est une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ), s'il existe une partie compacte  $S$  et une fonction continue  $F : U \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que la dérivée  $\nabla_x F$  (existe et) est continue sur  $U \times S$  et que pour tout  $x \in U$  on ait :

$$f(x) = \max_{s \in S} F(x, s). \tag{27}$$

Cette classe contient à la fois les fonctions convexes continues et les fonctions continûment dérivables. Ensuite Janin ([37]) a montré qu'en dimension finie, le sous-différentiel de Clarke  $\partial^o f$  d'une fonction  $f$  définie par (27) a une propriété bien plus forte, la sous-monotonie cyclique maximale, et que réciproquement, pour un tel opérateur  $T$  il existe toujours une fonction unique (à une constante près) sous- $C^1$   $f$  telle que  $T = \partial^o f$ .

Dans [23], on généralise le résultat de Janin [37] en dimension infinie. Cela nous conduit à étudier la classe des fonctions sous-lisses (subsmooth), i.e. les fonctions localement lipschitziennes dont le sous-différentiel de Clarke est cycliquement sous-monotone. Pour de telles fonctions, le sous-différentiel de Clarke coïncide avec celui de Hadamard (donc la fonction est régulière) et, par conséquent, est génériquement un singleton. D'après des résultats récents de Borwein et Wang sur la taille du sous-différentiel de Clarke (voir [58] e.g.), on conclut aisément que l'ensemble des fonctions sous-lisses est

maigre dans l'espace des fonctions localement lipschitziennes. Cependant cette classe contient toute fonction convexe continue et toute fonction continûment différentiable. Le résultat classique de Rockafellar pour les opérateurs maximaux cycliquement monotones et les fonctions convexes s.c.i. trouve son analogue pour les fonctions localement lipschitziennes.

---

## Optimisation multi-critère

---

Cette section comporte :

- une étude sur la connexité de l'ensemble des points Pareto-optimaux d'un problème multi-critère (de dimension finie),
- une étude sur les théorèmes de densité en optimisation vectorielle.

### **Etude de la connexité du problème de maximisation de trois critères semi-strictement quasi-concaves.**

Dans [30], on démontre que l'ensemble des points optimaux (au sens de Pareto) pour trois fonctions objectif continues et semi-strictement quasiconvexes sur un convexe compact de l'espace euclidien, est connexe. Ce résultat répond par l'affirmative à une conjecture émise en 1985 par Schaible, Choo et Chew. Notons que la conjecture générale concernant  $n \geq 1$  fonctions objectif a été récemment établie par Benoist ([9]).

### **Théorie de densité de Arrow-Barankin-Blackwell**

Un théorème de Arrow, Barankin et Blackwell [2], relativement connu, assure la densité des points scalairement maximaux dans l'ensemble des points maximaux d'une partie convexe et compacte de  $\mathbb{R}^n$ . Ce théorème a une interprétation économique importante en termes de "panier de biens" et de "prix optimal". Il a été généralisé à plusieurs reprises en dimension infinie pour des cônes convexes, fermés et pointés. Parmi les versions les plus significatives, on peut noter celle de Petschke [49] (donnée aussi indépendamment par Gallagher et Saleh [32]). Cinq ans plus tard, Gong [33] a proposé une amélioration de ce résultat, en affaiblissant l'hypothèse que le cône possède une base bornée. Cependant, aucun exemple ne montrait le caractère plus général de ce résultat. Dans [21], on établit une caractérisation des points "denting" pour des parties convexes et fermées d'un espace de Banach, qui généralise la caractérisation de Lin, Lin et Troyanski [41] établie sous l'hypothèse supplémentaire que ces parties soient bornées. Cette nouvelle caractérisation permet de démontrer que les hypothèses des théorèmes de Petschke et de Gong sont, en fait, équivalentes. Notre technique a aussi l'avantage de raccourcir les preuves originales de [49], [32] et [33].

## References

- [1] M. AVRIEL, W.-E. DIEWERT, S. SCHAIBLE & I. ZANG, *Generalized Concavity*, (Plenum Publishing Corporation, New York, New York, 1988).
- [2] K. ARROW, E. BARANKIN & S. BLACKWELL, "Admissible points of convex sets", in: *Contributions to the Theory of Games*, Princeton University Press, Princeton, 1953.
- [3] E. ASPLUND & R.T. ROCKAFELLAR, Gradients of convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **139** (1969), 433-467.
- [4] D. AUSSEL, J.-N. CORVELLEC & M. LASSONDE, Mean Value Property and Subdifferential Criteria for Lower Semicontinuous Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 4147-4161.

- [5] D. AUSSEL & A. DANILIDIS, Normal characterization of the main classes of quasiconvex functions, *Set-Valued Anal.* **8** (2000), 219-236.
- [6] D. AUSSEL & A. DANILIDIS, "Normal cones to sublevel sets: an axiomatic approach. Applications in quasiconvexity and pseudoconvexity", in: *Generalized Convexity/Monotonicity (Samos 1999)*, 88-101, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems **502**, Springer, Berlin, 2001.
- [7] M. BACHIR & A. DANILIDIS, A dual characterization of the Radon-Nikodym property, *Bull. Austral. Math. Soc.* **62** (2000), 379-387.
- [8] M. BACHIR, A. DANILIDIS & J.-P. PENOT, Lower subdifferentiability and Integration, *Set-Valued Anal.* **10** (2002), 89-108.
- [9] J. BENOIST, Connectedness of the Efficient Set for Strictly Quasiconcave Sets, *J. Opt. Th. Appl.* **96** (1998), 627-654.
- [10] J. BENOIST & A. DANILIDIS, Dual characterizations of relative continuity of convex functions, *J. Austral. Math. Soc., (Series A)* **70** (2001), 211-223.
- [11] J. BENOIST & A. DANILIDIS, Integration of Fenchel Moreau subdifferentials of epi-pointed functions, *SIAM J. Optimization* **12** (2002), 575-582.
- [12] J. BENOIST & A. DANILIDIS, Coincidence theorems for convex functions, *J. Convex Anal.* **9** (2002) (à paraître).
- [13] J. BORDE & J.-P. CROUZEIX, Continuity Properties of the Normal Cone to the Level Sets of a Quasiconvex Function, *J. Optimization Theory Appl.* **66** (1990), 415-429.
- [14] J. BORWEIN, W. MOORS AND Y. SHAO, Subgradient Representation of Multifunctions, *J. Austral. Math. Soc. (Series B)* **40** (1998), 1-13.
- [15] H. BREZIS, Equations et inequations non-lineaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **18** (1968) 115-175.
- [16] F.H. CLARKE, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, (Wiley Interscience, New York, New York, 1983).
- [17] J. COLLIER, The dual of a space with the Radon-Nikodym property, *Pacific J. Math.* **64** (1976), 103-106.
- [18] R. CORREA, A. JOFRE AND L. THIBAUT, Characterization of lower semicontinuous convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **116** (1992), 67-72.
- [19] J.-P. CROUZEIX, Pseudomonotone Variational Inequality Problems: Existence of Solutions, *Math. Program.* **78** (1997) 305-314.
- [20] J.-P. CROUZEIX & J.-A. FERLAND, Criteria for quasi-convexity and pseudo-convexity: relationships and comparisons, *Math. Program.* **23** (1992), 193-205.
- [21] A. DANILIDIS, "Arrow-Barankin-Blackwell theorems and related results in cone duality: a survey", in: *Optimization (Namur, 1998)*, 119-131, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems **481**, Springer, Berlin, 2000.
- [22] A. DANILIDIS, Subdifferentials of convex functions and sigma-cyclic monotonicity, *Bull. Austral. Math. Soc.* **61** (2000), 269-276.
- [23] A. DANILIDIS, P. GEORGIEV & J.-P. PENOT, Integration of multivalued operators and cyclic submonotonicity, *preprint 2000/09* (p. 23), Université de Pau et des Pays de l'Adour.

- [24] A. DANIILIDIS & N. HADJISAVVAS, Existence Theorems for Vector Variational Inequalities, *Bull. Austral. Math. Soc.* **54** (1996), 473-481.
- [25] A. DANIILIDIS & N. HADJISAVVAS, Characterization of nonsmooth semistrictly quasiconvex and strictly quasiconvex functions, *J. Optim. Th. Appl.* **102** (1999), 525-536.
- [26] A. DANIILIDIS & N. HADJISAVVAS, On the subdifferentials of quasiconvex and pseudoconvex functions and cyclic monotonicity, *J. Math. Anal. Appl.* **237** (1999), 30-42.
- [27] A. DANIILIDIS & N. HADJISAVVAS, Coercivity Conditions and Variational Inequalities, *Math. Program.* **86** (1999), 433-438.
- [28] A. DANIILIDIS & N. HADJISAVVAS, On generalized cyclically monotone operators and proper quasimonotonicity, *Optimization* **47** (2000), 123-135.
- [29] A. DANIILIDIS, N. HADJISAVVAS & J.-E. MARTINEZ-LEGAZ, Appropriate subdifferentials in quasiconvex analysis, *SIAM J. Optimization* **12** (2001), 407-420.
- [30] A. DANIILIDIS, N. HADJISAVVAS & S. SCHAIBLE, Connectedness of the Efficient Set for Three Objective Quasiconcave Maximization Problems, *J. Optim. Th. Appl.* **97** (1997), 517-524.
- [31] R. ELLAIA & A. HASSOUNI, Characterization of nonsmooth functions through their generalized gradient, *Optimization* **22** (1991), 401-416.
- [32] R. GALLAGHER & O. SALEH, Two Generalizations of a Theorem of Arrow, Barankin and Blackwell, *SIAM J. Control Optim.* **31** (1993), 217-256.
- [33] X. GONG, Density of the set of positive proper minimal points in the set of minimal points, *J. Opt. Th. Appl.* **86** (1995), 609-630.
- [34] A. GRANAS, "Methodes Topologiques en Analyse Convexe", Partie 3 des comptes rendus du cours d'été OTAN *Variational Methods in Nonlinear Problems*, Les Presses de l'Université de Montréal, Quebec, 1990.
- [35] P. HARKER AND J.-S. PANG, Finite-dimensional Variational Inequalities and Nonlinear Complementarity Problems: A survey of Theory, Algorithms and Applications, *Math. Program.* **48** (1990) 161-220.
- [36] J.-B. HIRIART-URRUTY & C. LEMARECHAL, Fundamentals of Convex Analysis, (Grundlehren Text Editions, Springer 2001).
- [37] R. JANIN, Sur des multiapplications qui sont des gradients généralisés, *C. R. Acad. Sc. Paris (Serie I)* **294** (1982), 115-117.
- [38] R. JOHN, "A Note on Minty Variational Inequalities and Generalized Monotonicity", in: *Generalized Convexity/Monotonicity (Samos 1999)*, 231-237, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems **502**, Springer, Berlin, 2001.
- [39] S. KARAMARDIAN, Complementarity over Cones with Monotone and Pseudomonotone Maps, *J. Opt. Th. Appl.* **18** (1976) 445-454.
- [40] D. KINDERLEHRER & G. STAMPACCHIA, An Introduction to Variational Inequalities and their Applications, (Academic Press, New York, New York, 1980).
- [41] B.-L. LIN, P.-K. LIN & S. L. TROYANSKI, A characterization of denting points of a closed, bounded, convex set, Longhorn Notes, *Y.T. Functional Analysis Seminar* 99-101 (1986), The University of Texas, Austin.
- [42] D.-T. LUC, Characterisations of Quasiconvex Functions, *Bull. Austr. Math. Soc.* **48** (1993), 393-406.

- [43] D.-T. LUC, Generalized monotone set-valued maps and support bifunctions, *Acta Math. Vietnam.* **21** (1996), 213-252.
- [44] G. MINTY, Monotone (Non Linear) Operators in Hilbert Space, *Duke Math. J.* **29** (1962) 341-346.
- [45] J.-P. PENOT, "Generalized derivatives in the light of nonsmooth analysis", in: *Recent Developments in Optimization*, 269-290, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems **429**, Springer, 1995.
- [46] J.-P. PENOT, Mean-value theorem with small subdifferentials, *J. Opt. Th. Appl.* **94** (1997), 209-221.
- [47] J.-P. PENOT, "Are Generalized Derivatives useful for Generalized Convex Functions?" in: *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity*, 3-59, Kluwer.Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [48] J.-P. PENOT & P.H. QUANG, Generalized Convexity of Functions and Generalized Monotonicity of Set-Valued Maps, *J. Optim. Th. Appl.* **92** (1997), 343-356.
- [49] M. PETSCHKE, On a theorem of Arrow, Barankin and Blackwell, *SIAM J. Control and Optim.* **28** (1990), 395-401.
- [50] R. PHELPS, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math. **1364**, (2nd Edition), Springer, Berlin, 1993.
- [51] F. PLASTRIA, Lower subdifferentiable functions and their minimization by cutting plane, *J. Opt. Th. Appl.* **46** (1985), 37-54.
- [52] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis* (Princeton University Press, Princeton NJ, 1970).
- [53] R.T. ROCKAFELLAR, On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, *Pacific J. Math.* **33** (1970), 209-216.
- [54] S. SCHAIBLE, "Generalized Monotonicity-Concepts and Uses, Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems", in: *Proc. 19<sup>th</sup> course Inter. Sch. Math. "G. Stampacchia", Erice/Italy*, June 19-25, 1994, Plenum Publishing Co., New York, pp.289-299, 1995.
- [55] S. SIMONS, *Minimax and Monotonicity*, Lecture Notes in Math. **1693**, Springer, Berlin, 1998.
- [56] SPINGARN, J.E., Submonotone subdifferentials of Lipschitz functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **264** (1981), 77-89.
- [57] THIBAUT, L. & ZAGRODNY, D., Integration of subdifferentials of lower semi-continuous functions on Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **189** (1995), 33-58.
- [58] WANG, X., *Fine and pathological properties of subdifferentials*, Ph.D. Dissertation (1999), Simon Fraser University, Vancouver, Canada.
- [59] J. YAO, Multivalued Variational Inequalities with K-Pseudomonotone Operators, *J. Opt. Th. Appl.* **83** (1994) 391-403.